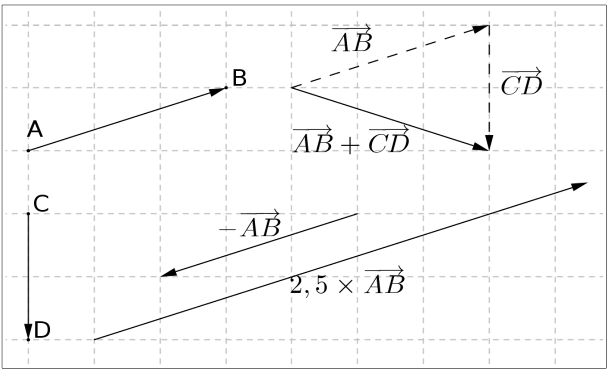
a) Rappels : les vecteurs nous ont été utiles dans le chapitre sur les pavages, pour décrire les translations.
Ainsi, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la translation qui déplace les objets dans la direction de (AB) (c'est à dire parallèlement à la droite (AB)), dans le sens de $\overrightarrow{AB}$ (c'est à dire de A vers B et pas de B vers A), et d'une longueur égale à la longueur AB.

On peut faire plusieurs sortes d'opérations avec les vecteurs, dont le résultat est à chaque fois un vecteur :
- on peut additionner des vecteurs : le résultat de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ est le vecteur qui correspond à la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ **suivie de** celle de vecteur $\overrightarrow{CD}$.



- on peut prendre l'opposé d'un vecteur : le vecteur $-\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$ (c'est à dire « comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$, mais **dans l'autre sens** »)
- on peut multiplier un vecteur par un nombre : par exemple $2{,}5\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a même direction et même sens que $\overrightarrow{AB}$, mais dont la longueur est $2{,}5\times AB$ (**2,5 fois la longueur du vecteur** $\overrightarrow{AB}$).

Notation : la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être notée tout simplement AB, mais on la note également souvent de la façon suivante : $\|\overrightarrow{AB}\|$ (on dit « norme de $\overrightarrow{AB}$ »)

b) Produit scalaire de deux vecteurs :
Il est possible de définir le *produit* de deux vecteurs de telle sorte que le résultat soit *un nombre* (et non plus un vecteur). C'est ce qu'on appelle **le produit scalaire de deux vecteurs**.

Notation : On note le produit scalaire avec un point : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
et on prononce « $\overrightarrow{AB}$ scalaire $\overrightarrow{CD}$ ».

Remarque : Le principe est que les règles habituelles de calcul ne doivent pas changer : par exemple, on doit pouvoir faire le calcul suivant :

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right).\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{CD}\right)^2$$

Produit scalaire d'un vecteur « avec lui-même » : on a, quel que soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2$ ce que l'on retient sous la forme suivante : $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}}}$

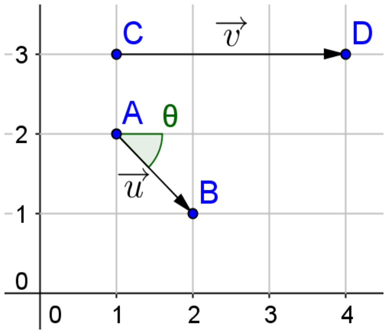
(Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est simplement égal au produit de sa longueur avec elle-même.)

Cas où les deux vecteurs sont orthogonaux :

Si les deux vecteurs sont orthogonaux, $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0}$

Réciproquement, si $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0}$, alors les deux vecteurs sont orthogonaux.

Cas général :



Quels que soient les vecteurs, $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos(\theta)}$

(Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs longueurs par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.)

Exemple : Sur la figure ci-dessus, on à CD=3 et $AB=\sqrt{2}\approx 1{,}4$ (Pythagore...)

On a aussi l'angle entre les deux vecteurs qui vaut $\theta=45°$.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos(\theta)$
$=3\times\sqrt{2}\times\cos(45°)=3$

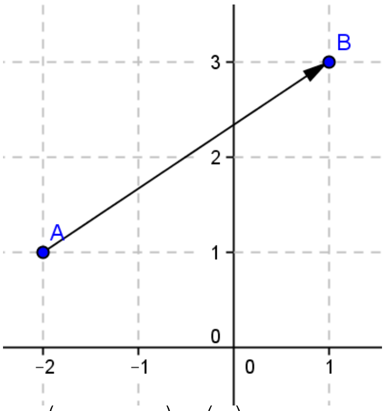
Remarque : cette formule regroupe à elle seule les deux cas précédents « vecteur scalaire lui-même » et « vecteurs orthogonaux » (voyez-vous pourquoi?)

c) Utilisation des coordonnées :

Rappel : Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont calculées en soustrayant les coordonnées de B à celles de A.

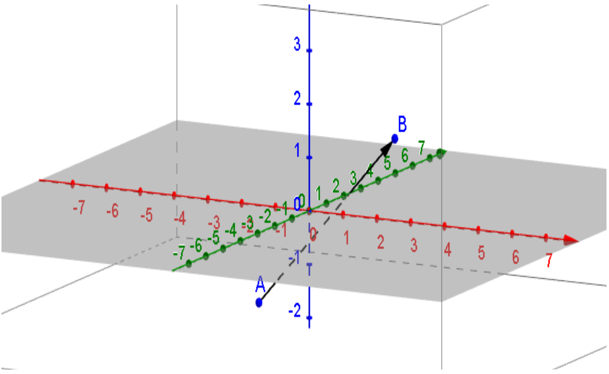
Exemples :

1) dans le plan :



$$A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

2) dans l'espace :



$$A\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-1\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$$

On peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs grâce à leurs coordonnées : il suffit de multiplier les coordonnées deux à deux et d'ajouter les résultats obtenus.

Propriété : si $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=x\times x'+y\times y'+z\times z'}$$

Bien sûr, cette propriété est également valable dans le plan :

Si $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=xx'+yy'}$$

d) Résumé : Règles à retenir.

On peut résumer tout ce chapitre avec seulement 5 formules à retenir (et bien sûr, à savoir utiliser!) ***:***

- 1ère formule pour le produit scalaire :
  $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}$

- formule pour la longueur d'un vecteur (cas particulier de la précédente) :
  $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}}}$

- et (2e cas particulier) s<u>i les deux vecteurs sont orthogonaux, alors</u> $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0}$ (réciproquement, si le produit scalaire vaut zéro, alors les vecteurs sont orthogonaux)

- coordonnées d'un vecteur :
  $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}}$

- 2ème formule pour le produit scalaire :
  $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=x\times x'+y\times y'+z\times z'}$

  (où $(x;y;z)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $(x';y';z')$ sont celles de $\overrightarrow{CD}$)